88137227

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

MATEMÁTICAS
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 3 – MATEMÁTICAS DISCRETAS

Martes 19 de noviembre de 2013 (tarde)

1 hora

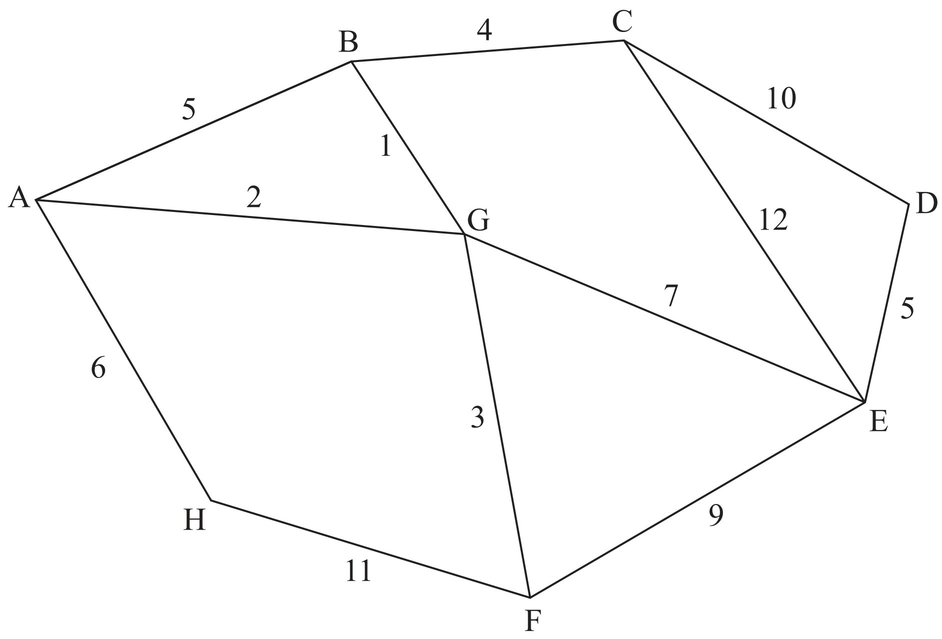
INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Se necesita una copia sin anotaciones del *cuadernillo de información* ***de Matemáticas NS y de Ampliación de Matemáticas NM*** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es *[60 puntos]*.

Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza una gráfica para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. *[Puntuación máxima: 7]*

La siguiente figura muestra un grafo ponderado.

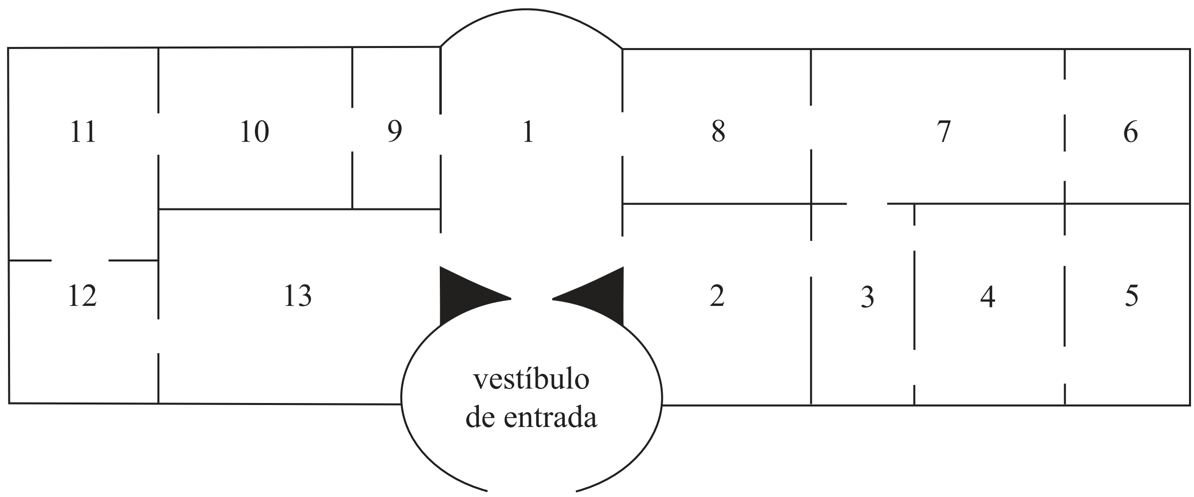


(a) Utilice el algoritmo de Kruskal para hallar un árbol generador minimal, mostrando claramente el orden en que se van añadiendo las aristas. *[5]*

(b) Dibuje el árbol generador minimal que ha hallado y escriba su peso. *[2]*

2. *[Puntuación máxima: 11]*

La siguiente figura muestra el plano de un museo.



(a) (i) Dibuje un grafo G que represente el plano del museo, donde cada sala de exposiciones esté representada por un vértice rotulado con el número de dicha sala y cada puerta que haya entre dos salas esté representada mediante una arista. No considere el vestíbulo de entrada como una sala de exposiciones.

(ii) Escriba los grados de cada uno de los vértices que representan una sala de exposiciones.

(iii) Virginia entra al museo por el vestíbulo de entrada. Utilice las respuestas dadas en los apartados (i) y (ii) para justificar por qué consigue Virginia visitar las trece salas de exposiciones atravesando cada puerta interna exactamente una vez. *[4]*

(Esta pregunta continúa en la siguiente página)

(Pregunta 2: continuación)

(b) Sean G y H dos grafos cuyas matrices de adyacencia se muestran a continuación.

G

	A	B	C	D	E	F
A	0	2	0	2	0	0
B	2	0	1	1	0	1
C	0	1	0	1	2	1
D	2	1	1	0	2	0
E	0	0	2	2	0	2
F	0	1	1	0	2	0

H

	P	Q	R	S	T	U
P	0	1	3	0	1	2
Q	1	0	1	3	2	0
R	3	1	0	2	1	3
S	0	3	2	0	2	0
T	1	2	1	2	0	1
U	2	0	3	0	1	0

Utilizando estas matrices de adyacencia,

(i) halle el número de aristas que tiene cada grafo;

(ii) compruebe que exactamente uno de los grafos contiene un sendero euleriano;

(iii) compruebe que ninguno de los dos grafos contiene un circuito euleriano. *[7]*

3. *[Puntuación máxima: 15]*

Considere un número entero a de $(n+1)$ cifras escrito en la forma $a = 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \ldots + 10 a_1 + a_0$, donde $0 \le a_i \le 9$ para $0 \le i \le n$, y $a_n \ne 0$.

(a) Compruebe que $a \equiv (a_n + a_{n-1} + \ldots + a_0)(\text{mod} 9)$. *[3]*

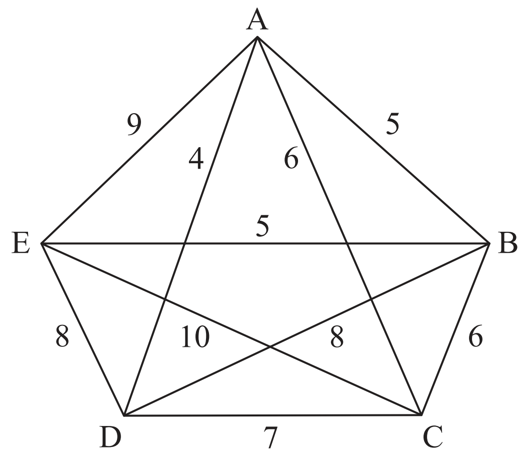
(b) A partir de lo anterior, halle todos los pares de valores de las cifras x e y, tales que el número $a = 476x212y$ sea múltiplo de 45. *[6]*

(c) (i) Si $b = 34390$ en base 10, compruebe que b es 52151 escrito en base 9.

(ii) A partir de lo anterior, halle b^2 en base 9, realizando todos los cálculos sin cambiar de base. *[6]*

4. *[Puntuación máxima: 14]*

La siguiente figura muestra un grafo ponderado G de vértices A, B, C, D y E.



(a) Compruebe que el grafo G es hamiltoniano. Halle el número total de ciclos hamiltonianos que hay en G; dé razones que justifiquen su respuesta. *[3]*

(b) Indique un límite superior para el problema del "viajante" correspondiente al grafo G. *[1]*

(c) Utilice el algoritmo de Prim para dibujar un árbol generador minimal del subgrafo que se obtiene eliminando C de G. *[5]*

(d) A partir de lo anterior, halle un límite inferior para el problema del "viajante" correspondiente a G. *[2]*

(e) Compruebe que el límite inferior hallado en el apartado (d) no puede ser la longitud de una solución óptima del problema del "viajante" correspondiente al grafo G. *[3]*

5. *[Puntuación máxima: 13]*

(a) Compruebe que 30 es un divisor de $n^5 - n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. *[5]*

(b) (i) Compruebe que $3^{3^m} \equiv 3 \pmod 4$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

(ii) A partir de lo anterior, compruebe que existe exactamente un par (m, n), donde $m, n \in \mathbb{N}$, que satisfaga la ecuación $3^{3^m} = 2^{2^n} + 5^2$. *[8]*